

Title	収斂級数に関する一問題
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 2(1) p.13-p.15
Issue Date	1946-11-03
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75138
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

3. 収斂級数に関する一問題

角谷静夫 (阪大)
(9月27日 受付)

$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ を正項収斂級数とすると部分級数の和 $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n_v}$ 全体の作る集合 \mathcal{G} は如何なる性質を持つか? (但し $\{x_{n_v} | v=0, 1, 2, \dots\}$ は $\{x_n | n=0, 1, 2, \dots\}$ の有限又は無限の部分系列を表はす。特に $\{x_{n_v}\}$ として empty set をとれば $S=0$ は \mathcal{G} の element と考えられよ) 此の問題は木村直樹君によつて提出された。部分級数の和 $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n_v}$ を考える代りに、始

めの級数の各項の附号を任意に替へたものの和

$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \pm x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) を考えても全く同様の議論が出来るから ($S = \frac{1}{2}(S_0 + \sigma)$ なる対応による) 今後は S の代りに σ を考えることにする (\mathcal{G} は同じ記号を保留する)

\mathcal{G} が $-S_0 + S_0$ を両端とする perfect set になることは容易に示される。又

$$(1) \quad x_k \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n$$

がすべての k に對して成立すれば \mathcal{G} は一つの closed interval になり

$$(2) \quad x_k > \sum_{n=k+1}^{\infty} x_n$$

がすべての k に對して成立すれば \mathcal{G} は totally disconnected になることも容易に示される。(2) が無限に多くの k に對して成立すると云ふだけでは \mathcal{G} が closed interval の有限個の和にならないと云ふことか云へるだけであつて他の場合 \mathcal{G} は必ずしも totally disconnected.

本談話に於ては(2)が無限に多くの k に對して成立
 ! しかも(6)が totally disconnected にならない實
 例を興へたら

$\frac{1}{12} \leq \alpha < \frac{1}{7}$ を満足する實数 α に對して

$$(3) \quad x_{4i} = \alpha^n, \quad x_{4i+1} = \frac{5}{6} \alpha^n, \quad x_{4i+2} = \frac{4}{6} \alpha^n, \\ x_{4i+3} = \frac{3}{6} \alpha^n, \quad i = 1, 2, \dots$$

と置く。即ち $\{x_n\}$ は

$$(4) \quad 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \alpha, \frac{5}{6}\alpha, \frac{4}{6}\alpha, \frac{3}{6}\alpha, \alpha^2, \frac{5}{6}\alpha^2, \frac{4}{6}\alpha^2, \\ \frac{3}{6}\alpha^2, \dots$$

なる系列である。これが上記の性質を持つことを示
 そう。先づ $\alpha < \frac{1}{7}$ なることより

$$(5) \quad \sum_{n=4k}^{\infty} x_n = \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6}\right) \sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n \\ = \frac{3\alpha^k}{1-\alpha} < \frac{3}{6} \alpha^{k-1} \equiv x_{4k-1}$$

であるから(2)を満足する k が無限に多く存在する。
 次に $\pm 1 \pm \frac{5}{6} \pm \frac{4}{6} \pm \frac{3}{6}$ は \pm を適當にとれば

$$(6) \quad 0, \pm \frac{2}{6}, \pm \frac{4}{6}, \pm \frac{6}{6}, \pm \frac{8}{6}, \pm \frac{10}{6}, \pm \frac{12}{6}, \pm \frac{18}{6}$$

の値を取る。($\pm \frac{14}{6}, \pm \frac{16}{6}$ が缺けてゐることに注意!)
 よつて $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \pm x_n$ は

$$(7) \quad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k$$

とよみ形になり且つこの形の数のどれにでもなり得
 る。但し σ_k は(6)に表はれる任意の数である。

$\alpha \geq \frac{1}{12}$ なることと(6)が $0, \pm \frac{2}{6}, \pm \frac{4}{6}, \pm \frac{6}{6}, \pm \frac{8}{6},$
 $\pm \frac{10}{6}, \pm \frac{12}{6} (= \pm 2)$ を含むこととより σ は $-\frac{2}{1-\alpha}$ と

$+\frac{2}{1-\alpha}$ との間任意の数を取り得る

わかる。即ち G は closed interval を含み
 つつ totally disconnected ではない。

最後に $s = -\frac{3}{1-\alpha} \equiv -\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ を左端とする closed
 interval が G に含まれないことは次の如くすれば
 わかる。(6)には $-\frac{14}{6} - \frac{16}{6}$ が含まれておなじし、
 $\sum_{n=4}^{\infty} x_n = \frac{3\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{2}$ であるから $-\frac{18}{6} + \frac{3\alpha}{1-\alpha}$ と $-\frac{12}{6} - \frac{3\alpha}{1-\alpha}$
 との間にある数は G に属さない。同様に $-\frac{18}{6} - \frac{18}{6}\alpha + \frac{3\alpha^2}{1-\alpha}$
 と $-\frac{18}{6} - \frac{12}{6}\alpha - \frac{3\alpha^2}{1-\alpha}$ との間にある数は G に属さない。一
 般に $-\frac{18}{6} - \frac{18}{6}\alpha - \dots - \frac{18}{6}\alpha^{n-1} - \frac{18}{6}\alpha^n + \frac{3\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ と
 $-\frac{18}{6} - \frac{18}{6}\alpha - \dots - \frac{18}{6}\alpha^{n-1} - \frac{12}{6}\alpha^n - \frac{3\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ との間
 の数は G には属さない。(n=1, 2, ...) よって
 $s = -\frac{3}{1-\alpha}$ を左端とする如何なる closed interval
 も G に含まれない。

G の topological-metrical characterization
 は未だ得られぬ。